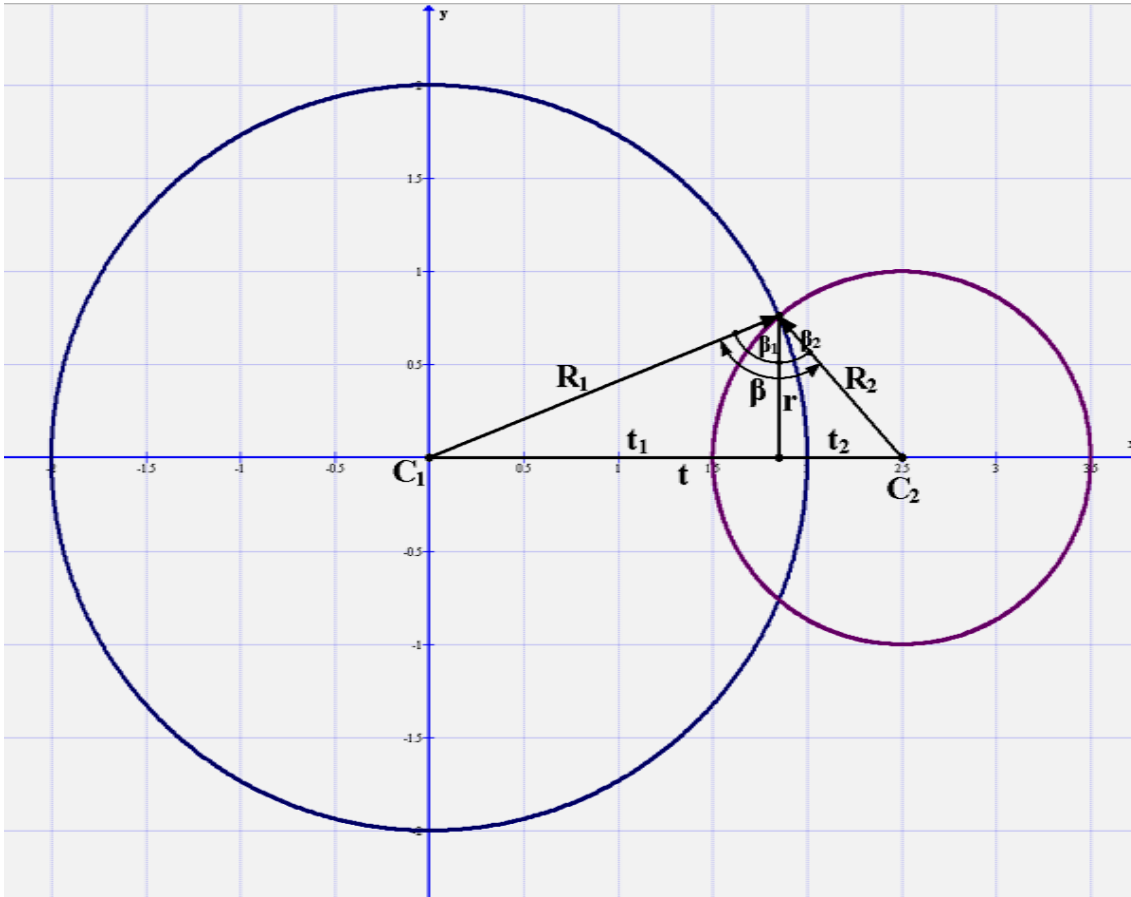


Két gömb áthatása – 3. rész

Arany szabály: Mindig éljünk az adódó ellenőrzési lehetőségekkel!

Most is ezt tesszük. Ehhez tekintsük az 1. ábrát is!



1. ábra

Ellenőrzésünk lényege, hogy teljesülnie kell a

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 \quad (1)$$

egyenlőségnek, ami az 1. ábra szemlélete alapján nyilvánvalóan fennáll.

Ha (1) teljesül, akkor teljesül a

$$\cos \beta = \cos(\beta_1 + \beta_2) \quad (2)$$

egyenlőség is. Vizsgálatunk alapja a (2) egyenlet.

A (2) egyenlőség bal oldalát korábban már koszinusztétellel meghatároztuk:

$$\cos \beta = \frac{R_1^2 + R_2^2 - t^2}{2 \cdot R_1 \cdot R_2} . \quad (3)$$

A (2) egyenlőség jobb oldalát most állítjuk elő az adatokkal és eredményekkel.

Először egy szögfüggvény - azonosság alkalmazásával:

$$\cos(\beta_1 + \beta_2) = \cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2 - \sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2 , \quad (4)$$

majd pedig (4) jobb oldala tényezőinek az 1. ábra szerinti átírásával:

$$\cos \beta_1 = \frac{r}{R_1} , \quad \cos \beta_2 = \frac{r}{R_2} , \quad (5/1)$$

$$\sin \beta_1 = \frac{t_1}{R_1} , \quad \sin \beta_2 = \frac{t_2}{R_2} . \quad (5/2)$$

Most (2), (4) és (5) - tel:

$$\cos \beta = \frac{r}{R_1} \cdot \frac{r}{R_2} - \frac{t_1}{R_1} \cdot \frac{t_2}{R_2} = \frac{1}{R_1 \cdot R_2} \cdot (r^2 - t_1 \cdot t_2) . \quad (6)$$

A korábbiak szerint:

$$r = R_1 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{R_1^2 - R_2^2 + t^2}{2 \cdot R_1 \cdot t} \right)^2} , \quad (7/1)$$

$$t_1 = \frac{t^2 + R_1^2 - R_2^2}{2 \cdot t} , \quad (7/2)$$

$$t_2 = \frac{t^2 - (R_1^2 - R_2^2)}{2 \cdot t} . \quad (7/3)$$

Majd (6) és (7) - tel:

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{1}{R_1 \cdot R_2} \cdot \left\{ R_1^2 \cdot \left[1 - \left(\frac{R_1^2 - R_2^2 + t^2}{2 \cdot R_1 \cdot t} \right)^2 \right] - \frac{t^2 + R_1^2 - R_2^2}{2 \cdot t} \cdot \frac{t^2 - (R_1^2 - R_2^2)}{2 \cdot t} \right\} = \\ &= \frac{1}{R_1 \cdot R_2} \cdot \left[R_1^2 - \left(\frac{R_1^2 - R_2^2 + t^2}{2 \cdot t} \right)^2 + \frac{(R_1^2 - R_2^2) + t^2}{2 \cdot t} \cdot \frac{(R_1^2 - R_2^2) - t^2}{2 \cdot t} \right] = \\ &= \frac{1}{R_1 \cdot R_2} \cdot \frac{1}{(2 \cdot t)^2} \cdot \{ R_1^2 \cdot (2 \cdot t)^2 - (R_1^2 - R_2^2 + t^2)^2 + [(R_1^2 - R_2^2) + t^2] \cdot [(R_1^2 - R_2^2) - t^2] \} = \\ &= \frac{1}{R_1 \cdot R_2} \cdot \frac{1}{(2 \cdot t)^2} \cdot \{ R_1^2 \cdot (2 \cdot t)^2 + [(R_1^2 - R_2^2) + t^2] \cdot [(R_1^2 - R_2^2) - t^2 - (R_1^2 - R_2^2 + t^2)] \} = \\ &= \frac{1}{R_1 \cdot R_2} \cdot \frac{1}{(2 \cdot t)^2} \cdot \{ R_1^2 \cdot (2 \cdot t)^2 + [(R_1^2 - R_2^2) + t^2] \cdot (-2 \cdot t^2) \} , \text{ azaz:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{1}{R_1 \cdot R_2} \cdot \frac{1}{(2 \cdot t)^2} \cdot [R_1^2 \cdot (2 \cdot t)^2 - (R_1^2 - R_2^2 + t^2) \cdot 2 \cdot t^2] = \\ &= \frac{1}{R_1 \cdot R_2} \cdot \left(R_1^2 - \frac{R_1^2 - R_2^2 + t^2}{2} \right) = \frac{1}{R_1 \cdot R_2} \cdot \frac{2 \cdot R_1^2 - (R_1^2 - R_2^2 + t^2)}{2} = \frac{1}{R_1 \cdot R_2} \cdot \frac{2 \cdot R_1^2 - R_1^2 + R_2^2 - t^2}{2} = \\ &= \frac{1}{R_1 \cdot R_2} \cdot \frac{R_1^2 + R_2^2 - t^2}{2} = \frac{R_1^2 + R_2^2 - t^2}{2 \cdot R_1 \cdot R_2} , \text{ tehát:} \end{aligned}$$

$$\cos \beta = \frac{R_1^2 + R_2^2 - t^2}{2 \cdot R_1 \cdot R_2} , \quad (8)$$

teljes egyezésben (3) - mal. Ezzel az ellenőrzést elvégeztük, hiszen a (2) alapján végzett, eltérő úton haladó számítások ugyanarra az eredményre vezettek.

Megjegyzések:

M1. Bizonyára többen úgy gondolják, hogy ez a sok számolás felesleges.

Nekünk erről más a véleményünk. A kb. fél évszázados számítási tapasztalataink szerint nekünk az „jött be”, hogy minden ésszerű, kivitelezhetőnek látszó ellenőrzési lehetőséget megragadunk. A „felesleges számítások” sikeres elvégzése mintegy automatikusan azt hozza magával, hogy javul a számítási technikánk, azaz törekszünk az egyszerűbb és rövidebb, elegánsabb megoldások megtalálására, valamint nő az önbizalmunk is. Ezek hatására egyre nehezebb feladatok megoldására is vállalkozunk, melyek tovább erősítik fentieket. Mondtuk, hogy ez a helyzet nálunk. A kezdő számára azt tanácsolhatjuk – ha szükség lenne ilyenre –, hogy találja meg a saját maga számára kedvező, azaz jól működő számítási technikákat. Amíg ez bekövetkezik, addig alkalmazhatja az itt javasoltakat is.

M2. További ellen- és észrevétel lehet ez: majd a számolási részben, a számokkal ellenőrizzük. Erre azt mondhatjuk: jó, ha a képletek is jók. Mi itt az ellenőrző számítást a képletekre végeztük. Ennek során azonos átalakításokat végeztünk, és igyekeztük a számítás menetét racionalizálni. Ez alatt azt értjük, hogy igyekszünk az egyszerűbb, áttekinthetőbb utakat keresni, képletalakokkal dolgozni. (Kihagyva a szükségtelen „kanyarokat”.)

M3. Nem elhanyagolható szempont az sem, hogy menet közben „ötletekre teszünk szert”, ami a feladatmegoldás egy fontos közbenső eleme. Ennek során ténylegesen igazolódik, hogy kreatívak vagyunk, ami ismét erősíti önbizalmunkat. Továbbá a már említett azonos átalakítások ismétlése, sikeres alkalmazása egyre kevésbé hozza ki a tanulóból azt, hogy „mi szükség van ezek tanulására?”. A gyakorlat egy magasabb szintjén a tanuló belátja, hogy a súlykolt azonosságok volt az egyik lépcsősor, melyen eddig eljutott.

M4. Látható, hogy itt a probléma - megoldással kapcsolatos gondolatainkat vettük megint elő. Ha a tanuló ezekbe hajlandó belegondolni, akkor talán kisebb az esélye rá, hogy hülyét csináljon magából, amikor a tanárt azzal gyanúsítja, hogy feleslegesen gyötri őt és az osztályt a matekkal. Főleg, ha a tanár pl. matek ~ fizika, nem pedig földrajz ~ törti szakos.

M5. Elképzelhetőnek tartjuk, hogy a tanítási, ezzel együtt a tanulási technológiák és technikák a közeli jövőben gyorsan és gyökeresen átalakulnak. Többen úgy gondolják, hogy ami most van, az jórészt alkalmatlan arra, hogy a jövő tanulóját kiképezze. (Élethosszig tartó tanulás!) Saját tapasztalataink szerint már a jelenlegi, nem is igazán korszerű képzési követelményeknek sem felel meg iskolarendszerünk. Szóval, jönnie kell a változásnak! Minél előbb, annál jobb.

M6. Már többször elmondtuk – előszóban és írásban is –, hogy az „éles bevetés” során gyakran az a helyzet, hogy nincs senki, aki megmondja, hogy mi a helyes eredmény. Ez a fő oka annak, hogy igyekszünk rávenni a tanulót az adódó ellenőrzések elvégzésére. Hogy az életben előálló számtalan feladatban mi minden szolgálhat ellenőrzés gyanánt, azt is a feladat megoldójának kell megkeresnie. Ebben segíthet az adott téma szakirodalma is.

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
ny. mérnöktanár

Szódliget, 2022. 02. 11.

Továbbiak: <https://galgoczi.net/>